

Recorte de paridad y grupos alternantes

Edgar Delgado Vega

25 de junio de 2023 | Compilado el 30 de abril de 2026, v.0.0.2

Comencé hace unos días preguntándome por una noción absolutamente simple y entendida por todos desde hace mucho:

¿Qué es permutar?

Para estar en el *flow*, comenzaré por lo antiquísimo. Si revisamos las memorias que tenemos de nuestros tempranos años, recordamos que los naturales \mathbb{N} se particionan naturalmente (valga toda la redundancia) en dos subconjuntos que son disjuntos.

Por supuesto que esto pasa de culterano a simple como sigue: todo número natural $n \in \mathbb{N}$ es pertenencia exclusiva del conjunto de números pares o del conjunto de números impares. A esto es lo que llamamos partición (disco duro no a la vista).

Bueno, entonces resumimos esta jugada a los pares como

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

y los impares así:

$$O = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

La diferencia es casi trivial, solamente le agregamos un 1 y esa es toda la magia. En realidad, pensemos que pasamos de un conjunto a otro untando

$$\pm 1$$

(según corresponda y sin salirse, no seas vivo).

Ahora el truquito de la palabra rara más arriba se resume en

$$E \cap O = \emptyset.$$

1. Ecuación funcional de paridad

Pero, aguanta un toque. Eso se me hace conocido. Sí, la ves en potencias de cosas periódicas, específicamente en las funciones trigonométricas de toda la vida. Entonces, sea $z \in \mathbb{C}$, sus series de Taylor cantan así fuera del concierto:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+1)}$$

Y, en efecto, esto no es cine, pero nos trae nuevamente a la idea de par e impar en la losa deportiva de las funciones con esta cuestión clásica:

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad (\text{función impar}),$$

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad (\text{función par}).$$

Te paso la voz que lo que aquí tenemos es una ecuación funcional con silueta $f(-z) = \pm f(z)$.

2. Transposición par e impar

Continuemos con la fiesta de disfraces, ahora vamos con grupos, ya más cerca de la pregunta inicial.

Si tenemos Σ_n el conjunto de todas las permutaciones de n elementos, sabemos que su orden viene dado por la función especial favorita de muchos (que la camuflamos más arriba) $|\Sigma_n| = \Gamma(n+1)$.

Y ahora tomemos tan solo una de esas funciones biyectivas en Σ_n , la cual denotamos por σ chiquita. Entonces, es nuestra necesidad decir que

$$\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_\ell)$$

es un ciclo de longitud ℓ . Sí, asumiremos aquí sin especificar unas condiciones para que esto sea un ciclo.

Bajemos al *El Llano en llamas* de Rulfo con el ejemplo más importante para la pregunta principal:

$$(12), (45),$$

que son ciclos de longitud $\ell = 2$ a los que llamaremos transposiciones (recuerda este nombre). También tenemos el Triciclo Perú, pero ese cántalo tú en tu cuaderno.

Lo que sucede es que cualquier permutación σ se puede descomponer como un producto de $\ell - 1$ transposiciones. El truco con la varita sucede así:

$$\sigma = \prod_{i=\ell}^2 (a_1 a_i). \quad (1)$$

Observa que esto va para abajo en el índice y que también vamos de derecha a izquierda en la aplicación, por convención. ¿Y qué tiene que ver aquí todo esto? Respondo con otra pregunta:

¿Cuántas transposiciones tiene σ descompuesto en la productoria?

Ya te respondiste tú mismo con este empujón: un ciclo de longitud ℓ es par si ℓ es impar y es impar si ℓ es par.

En palabras simples y sencillas, (123) es par y (12) es impar, por citar dos ejemplos trascendentales.

Como estamos fastidiosos, también es posible pasar de producto a suma con el afán de capturar la paridad, es decir:

$$\sum_i (\ell_i - 1) \pmod{2}.$$

Listo, ya está casi todo dicho, pero un ejemplo más, para mayor enganche. Sea $\sigma = (1234)$, luego

$$\sigma = (14)(13)(12).$$

Tenemos $\ell = 3$, por lo que es impar. Ahora mira este:

$$\sigma = (12345) = (15)(14)(13)(12),$$

con lo que $\ell = 4$ es par. Te toca hacerlo aburridamente con la suma, por favor.

3. Grupo alternante

Es momento de usar la paridad como un clasificador en esto. Para cosas pares, tenemos una estructura algebraica conocida como grupo alternante A_n , un subgrupo del grupo simétrico general Σ_n . Como seguro imaginarás, posee la mitad de elementos:

$$|A_n| = \frac{\Gamma(n+1)}{2}.$$

Por inmediata curiosidad preguntamos:

¿Qué nombrecito se le asignó al subgrupo de Σ_n que tiene solo transposiciones impares?

Enhorabuena, porque rompemos las cerraduras (tal vez no es tan buena hora). Recordemos que los subgrupos también deben ser cerrados bajo su operación. Pero se cumple lo siguiente:

$$O \odot O = E.$$

Por ende, aquí nos salimos de los axiomas.

Si te das cuenta, sucede exactamente igual que con los números naturales: si sumas dos pares, obtienes otro par; si sumas dos impares, obtienes un número par. Con las trigonométricas no pasa esto y es un problema. No obstante, podemos construir a pedido, raudo, definiendo la paridad de las funciones trigonométricas:

$$\varpi(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ es par,} \\ 1, & f \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego, nuestra $\odot = \varpi$ viene dada como

$$\varpi(f + g) = (\varpi(f) + \varpi(g)) \pmod{2}. \quad (2)$$

Con lo que finalmente llegamos a que las funciones pares cosenos se mantienen pares:

$$\varpi(\cos + \cos) = 0$$

y las impares $\varpi(\sin) = 1$,

$$\varpi(\sin + \sin) = 0$$

llegan a ser pares.

4. Cerradura

\LaTeX no lo sabe, pero terminamos el recorte en una página impar.

Licencia Este documento está disponible bajo la licencia Creative Commons [CC BY-NC-ND 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/), que permite su distribución con fines no comerciales, siempre que se otorgue el crédito adecuado y no se realicen obras derivadas.