

La exponencial y el combinado

Edgar Delgado Vega

16 de Octubre de 2026

Compilado el 16 de octubre de 2026, v.0.0.1

Resumen

Un segundo repaso de la función exponencial e^x con un bajo combinatorio.

1. Recuento

Estuve repasando después de años la función del logaritmo, de la cual subí una nota en mi blog con diferentes apariciones en DSP (decibelios, cents, MIDI y ruido), junto con cómo se hace en un sintetizador Vital (véase la [nota en mi blog](#)). No obstante, quedó por fuera mi modo de ver la función exponencial.

Desde hace dos años desarrollo mi librería [figuratenum](#) y ese sabor combinatorio irrumpe bastante en la forma en que pienso determinadas objetos clásicos del cálculo elemental.

2. De la combinatoria

En la actualidad pienso en la función exponencial como una función generadora servida en dos platos, uno para el almuerzo y otro para la cena. Recordemos que tenemos $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales (es suficiente para la idea).

Lo de generadora viene de una idea simple pero muy poderosa: vamos a asociar a cada término a_n un monomio $a_n x^n$ y fusionarlos en una expresión analítica o algebraica, sumándolos por supuesto. Lo resumimos en una serie formal de potencias

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1)$$

Desde luego, este $G(x)$ cabe mirarlo como un elemento del anillo de series formales $\mathbb{C}[[x]]$ o $\mathbb{R}[[x]]$. O como una serie de potencias que define una función en el interior de su disco de convergencia. Lo formal sale, pero no implica que converja para valores numéricos de dicha x . En esta primera perspectiva, x es una indeterminada y las operaciones son meramente del álgebra.

3. Plato fuerte del almuerzo

Ya dijimos que hay dos platos, el primero se llama función generadora ordinaria (que será el almuerzo). La definimos tal y como la pusimos arriba. Dispongo la siguiente definición.

Definición 3.1. La función generadora ordinaria de una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal de potencias cuyos coeficientes son los términos de dicha sucesión. La podemos escribir como

$$G_o(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Si la serie tiene radio de convergencia $R > 0$, su suma define una función analítica en el disco $|x| < R$. En el caso de la función exponencial, la pienso combinatoriamente como la sucesión

$$((n!)^{-1})_{n \geq 0}. \quad (2)$$

Por convención $0! = 1$. Y su función generadora ordinaria queda así

$$G_o(x) = \sum_{n \geq 0} (n!)^{-1} x^n \quad (3)$$

Que curiosamente es, con pase al centro,

$$G_o(x) = e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \quad (4)$$

Entonces, hoy por ayer, me gusta definir la exponencial como sigue (olvidemos el dominio hasta el final).

Definición 3.2 (Serie exponencial). La serie exponencial es aquella función generadora ordinaria de la sucesión de recíprocos de los factoriales de los enteros no negativos

$$((n!)^{-1})_{n \geq 0}.$$

Vamos al plato de la noche.

4. La cena

Tratemos ahora con una sucesión (a_n) que prepara sus cubiertos para que cada elemento sea $a_n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Si le asociamos los monomios de la función generadora ordinaria G_o , llegamos a la archiconocida serie geométrica formalmente

$$G_o(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = (1 - x)^{-1}. \quad (5)$$

Pesquemos ahora el aspecto numérico. Establezcamos $|x| < 1$ para que la serie converja. Un repaso instantáneo a esto es $x = \frac{1}{2}$. Si comienzo a sumar

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Pero si nos pasamos del punto, es decir, $x = 2$, tenemos que sumar $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, y la serie diverge. Sus términos ni siquiera tienden a cero.

¿Entonces dónde está la exponencial después de este vaivén? Nos falta la siguiente definición.

Definición 4.1. La función generadora exponencial de una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ viene dada por la serie formal de potencias cuyos coeficientes son los términos de dicha sucesión divididos por el factorial $n!$. Es decir,

$$G_e(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Sale, naturalmente, al tomar la sucesión constante igual a 1, que

$$G_e(x) = \sum_{n \geq 0} 1 \cdot \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Con lo que definimos la versión final, con una pizca tautológica.

Definición 4.2 (Serie exponencial). La serie exponencial es aquella función generadora exponencial de la sucesión constante

$$(a_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 1, \dots).$$

Queda sencillamente, por doble centro, una igualdad entre las definiciones, considerando las dos de arriba con sus respectivas sucesiones.

$$G_o^{((n!^{-1}))}(x) = G_e^{(1)}(x) = e^x.$$

5. Las derivadas y los términos

Seguro has visto que se parece a la serie de Taylor, pero difieren en sus hondonadas de oro. La exponencial que construimos es de sabor combinatorio y está armada ladrillo por ladrillo mediante los términos de una sucesión. Por su parte, Taylor nace de la representación de funciones mediante sus derivadas de orden creciente. Por cierto, con algo de formalidad que omitimos arriba, decimos ahora que

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\quad (6)$$

Puedes probar que es continua, estrictamente creciente y biyectiva. Por esta última propiedad, existe una función inversa, el logaritmo, que pasea por diversos lugares musicales.

Listo, antes de finalizar también cabe representarse e^x como solución a la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden homogénea

$$y' - y = 0, \quad (7)$$

siempre que establezcamos la condición inicial $y(0) = 1$, si no, nos sale una familia.