Una representación integral de A054602 mediante números pentagonales generalizados

Edgar Delgado Vega

12 de Noviembre de 2026
Compilado el 12 de noviembre de 2026, v.0.1

Resumen

Demuestro una representación integral de la secuencia OEIS-A054602 mediante números figurados pentagonales generalizados en una variable real $S_5(x), x \in \mathbb{R}$.

1. Lo que son para mí los números figurados

Hoy 12 de noviembre en la madrugada estaba reposando en mi cama con mi cuaderno antes de dormir y jugando con las integrales de números figurados. Pero, primero, ¿qué es un número figurado? Hace poco propuse una definición en mi blog que pienso mantener a lo largo de más escritos, pues recoge lo que significa para mí un número figurado.

Al respecto, sea $\mathfrak{f} \in \mathbb{Q}[X]$ con $\deg(\mathfrak{f}) = k \geq 2$, tal que induce una función $\mathfrak{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, que la represento como una sucesión bilátera

$$(\mathfrak{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{j}^{k} a_j n^j\right)_{n\in\mathbb{Z}},$$

donde $a_k \neq 0$, y además tiene una interpretación geométrica.

Observación 1.1. Debo exigir polinomios con valores enteros, es decir, que $\mathfrak{f}(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. Las integrales que producen secuencias

Los números pentagonales generalizados tienen dimensión 2 y, según la referencia básica [Dez12, p.78], se definen como

$$\mathfrak{f}_{k=2}(n) = S_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es inmediato jugar a extender S_5 a una variable real, en otras palabras, considerar $n \mapsto x \in \mathbb{R}$. Esto convierte S_5 en una parábola en el plano afín $\mathbb{R}^2$. Algo espontáneo que se me ocurrió fue preguntarme: ¿qué valores genera si la integro?

Escribí

$$\mathcal{A}(a,b) = \int_a^b S_5(x)\, dx,$$

con el afán que $\mathcal{A}$ fuera un número entero, así podría crear nuevas sucesiones.

No obstante, necesitaba siempre que a y b fueran distintos. Por lo que pensé: si las parábolas admiten una parametrización, puedo jugar a unificar en un solo parámetro los límites. Y, ya que estamos en los poligonales generalizados, ¿por qué no hacer $a = -n$ y $b = n$?

Así fue que probé algunos valores numéricamente, varias veces salieron racionales y otras veces, enteros. Hasta que pensé en un desfase, crear un intervalo hermosamente simétrico

$$I = [1-n, n+1]$$

Con esto, integré sobre I,

$$\mathcal{A}(n) = \int_{1-n}^{n+1} \frac{x(3x-1)}{2}\, dx \tag{1}$$

Para $n \in \mathbb{N}_0$, el intervalo I se extiende a ambos lados del origen en el eje de abscisas. Por curioso que parezca, resulta ser la secuencia OEIS - A054602, cuyos primeros términos salen

$$\mathcal{A}(n) = 0, 3, 12, 33, 72, 135, 228, 357, \ldots$$

Qué bueno es que produzca un área algebraica no negativa.

3. Función totiente y números pentagonales generalizados

Euler aparece por doquier. Por ejemplo, la secuencia $a(n)$ indexada en OEIS-A054602 se define como

$$a(n) = \sum_{d|3} \varphi(d) n^{\frac{3}{d}} \tag{2}$$

Sí, la función totiente φ y es inmediato sacar que los que dividen a 3, son 1 y 3, por lo que al desarrollar la suma tuve

$$\varphi(1)n^3 + \varphi(3)n.$$

Bien, dado que $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(3) = 2$, entonces se llega a $a(n) = n^3 + 2n$.

Observación 3.1. En la página de documentación de mi librería `figuratenum`, comento el teorema del número pentagonal de Euler,

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-z^j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n z^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

Solo te diré: mira la potencia al lado derecho de la ecuación, $z^{S_5(n)}$.

4. Prueba de la identidad

Finalmente, llego a la siguiente proposición, que envié a revisar al mismísimo OEIS (algo gracioso para relajar el momento).

Proposición 4.1. *La secuencia $a(n)$ tiene representación integral mediante evaluación en el intervalo $(1-n, n+1)$, centrado en 1, de la función polinomial asociada a los números pentagonales generalizados $S_5(x)$, es decir*

$$\sum_{d|3} \varphi(d) n^{\frac{3}{d}} = \int_{1-n}^{n+1} \frac{x(3x-1)}{2}\, dx$$

para $n \in \mathbb{N}_0$.

La demostración es, valga la suma infinita, sumamente simple.

Demostración. La manera idónea es llegar a la expresión polinomial cúbica de $a(n)$. Para ello, sustituyo $x = t+1$, de modo que $dx = dt$ y los límites de integración se convierten en $t = -n$ y $t = n$. Por ende,

$$\int_{-n}^{n} \frac{(t+1)(3t+2)}{2} dt = \int_{-n}^{n} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{5t}{2} + 1\right) dt.$$

Como t es una función de tipo impar con un intervalo simétrico respecto al origen, $\int_{-n}^{n} \frac{5t}{2}\, dt = 0$. Luego, la función que me queda es par, así que, nuevamente por simetría del intervalo,

$$\int_{-n}^{n} \left(\frac{3t^2}{2} + 1\right) dt = 2\int_{0}^{n} \left(\frac{3t^2}{2} + 1\right) dt$$

Finalmente, evalúo en tales extremos

$$2\left[\frac{t^3}{2} + t\right]_0^n = n^3 + 2n.$$

Ya lo viste arriba con la secuencia $a(n)$. Queda. □

Veré que pasará en OEIS con mi contribución y lo contaré por aquí.

Referencias

[Dez12] E. Deza and M. M. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific, 2012.

Licencia Este documento está disponible bajo la licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0, que permite su distribución con fines no comerciales, siempre que se otorgue el crédito adecuado y no se realicen obras derivadas.