

Números de Motzkin en teoría musical

Edgar Delgado Vega

17 de junio de 2023

(Compilado el 22 de Junio de 2025)

Resumen

Exploramos una interpretación del ritmo euclidiano $E(k, n)$ aplicada a un subconjunto de estructuras enumeradas por los números de Motzkin \mathcal{M}_n . Esta conexión permite una lectura rítmica y melódica de dichas configuraciones, integrando elementos de la teoría musical con conceptos de la combinatoria discreta, y abriendo posibilidades para su aplicación en composición algorítmica y *live coding*.

1. Introducción

Dados n puntos equidistantes sobre un círculo, los números de Motzkin enumeran las \mathcal{M}_n formas de trazar acordes entre esos n puntos sin que se crucen. Inspirados en la representación geométrica de los ritmos euclidianos [DGMM⁺09], observamos que este tipo de objeto combinatorio circular se presta naturalmente a una interpretación musical, al asociar ritmos y notas musicales a sus configuraciones.

2. Descripción del modelo

Definición 2.1 (Número de Motzkin). El *número de Motzkin* \mathcal{M}_n se define por

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = 1, \quad \text{y para } n \geq 2, \quad \mathcal{M}_n = \frac{(2n+1)\mathcal{M}_{n-1} + (3n-3)\mathcal{M}_{n-2}}{n+2}.$$

De esta definición recursiva se deduce fácilmente una implementación en Sonic Pi para calcular el n -ésimo número de Motzkin:

```
define :motzkin_number do |n|
  return 1 if n <= 1
  return (
    ((2 * n + 1) * motzkin_number(n - 1) +
     (3 * n - 3) * motzkin_number(n - 2)) / (n + 2)
  )
end
```

Este código refleja directamente la fórmula recursiva, llamando a los valores anteriores para obtener \mathcal{M}_n .

Definición 2.2. Llamamos *número de Motzkin-Euclidiano* $\mathcal{M}_{E(k,n)}$ al subconjunto de elementos enumerados por los números de Motzkin \mathcal{M}_n que representan un ritmo euclidiano.

Ejemplo 2.3. Enumeramos a continuación los elementos euclidianos en notación de subconjuntos rítmicos [DGMM⁺09, p.430] y en representación binaria para un solo acorde:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{E(2,3)} &= \{0, 2\}_3 = (1, 0, 1), \\ \mathcal{M}_{E(2,4)} &= \{0, 2\}_4 = (1, 0, 1, 0), \\ \mathcal{M}_{E(2,5)} &= \{0, 2\}_5 = (1, 0, 1, 0, 0), \\ \mathcal{M}_{E(2,7)} &= \{0, 3\}_7 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

En el conjunto $\mathcal{M}_{E(2,3)}$ podemos considerar las rotaciones del patrón rítmico. Por ejemplo, los subconjuntos $\{1, 2\}_3$ y $\{0, 1\}_3$ representan distintas rotaciones sobre 3 pulsos, donde cada número indica la posición de los eventos o golpes dentro del ciclo.

Para $\mathcal{M}_{E(2,4)}$, el patrón $\{1, 3\}_4$ corresponde a la secuencia binaria

$$(0, 1, 0, 1),$$

indicando eventos en las posiciones 1 y 3 sobre un total de 4 pulsos.

En el caso de $\mathcal{M}_{E(2,5)}$, encontramos varios patrones que representan diferentes combinaciones de golpes:

$$\begin{aligned}\{1, 4\}_5 &= (0, 1, 0, 0, 1), \\ \{0, 3\}_5 &= (1, 0, 0, 1, 0), \\ \{2, 4\}_5 &= (0, 0, 1, 0, 1), \\ \{1, 3\}_5 &= (0, 1, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Podemos asociar a cada elemento Motzkin-Euclidiano una interpretación melódica, es decir, una escala de n notas. Si tomamos $n = 5$, podemos asociar una escala pentatónica mayor sobre Do , obteniendo así $(C, 0, E, 0, 0)$ y sus posibles rotaciones. Para $n = 7$, podemos asociar una escala diatónica o modal. Por ejemplo, una escala Lidia sobre Re : $\mathcal{M}_{E(2,7)} = \{0, 3\}_7 = (D, 0, 0, G\sharp, 0, 0, 0)$.

Para el caso de dos acordes, es decir, $k = 4$, obtenemos un patrón ritmo-melodía que, de forma equivalente, representa un acorde Amaj7:

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{0, 3\}_7 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) = (A, 0, C\sharp, 0, E, 0, G\sharp)$$

En total, se configuran los siguientes elementos Motzkin-Euclidianos, donde r representa la rotación en Sonic Pi:

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{0, 2, 4, 6\}_7, r = 0,$$

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{0, 1, 3, 5\}_7, r = 6,$$

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{1, 2, 4, 6\}_7, r = 5,$$

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{0, 2, 3, 5\}_7, r = 4,$$

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{1, 3, 4, 6\}_7, r = 3,$$

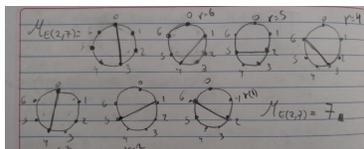
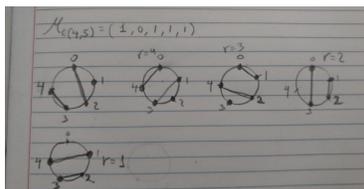
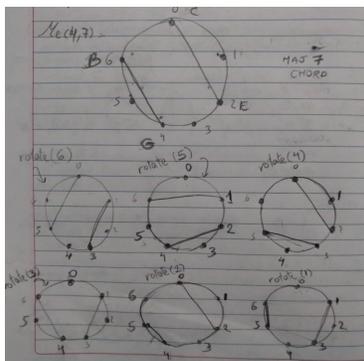
$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{0, 2, 4, 5\}_7, r = 2,$$

$$\mathcal{M}_{E(4,7)} = \{1, 3, 5, 6\}_7, r = 1.$$

Siguiendo el patrón constructivo de acordes sobre un mayor número de puntos, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5. Sea $k, n \in \mathbb{N}$, con k par. Dado un número Motzkin-Euclidiano $\mathcal{M}_{E(k,n)}$, existe un ritmo euclidiano para cada $k < n$, salvo rotaciones.

Demostración. Consúltese las listas anteriores. A continuación se presenta una demostración geométrica para los casos $k = 2, 4$ y $n = 5, 7$:



□

3. Conclusiones

Las limitaciones del objeto radican en que, aunque podríamos tener acordes de m notas para un ritmo de n pulsos, el número k se restringe a valores pares. Por otro lado, según la premisa constructiva de \mathcal{M}_n , podemos observar que algunas operaciones, como la complementación [GMTT09, p.19], requieren la intersección de acordes; por lo tanto, desde este punto de vista, dichas operaciones quedan deshabilitadas.

En trabajos futuros, sería interesante investigar qué operaciones son factibles de aplicar desde este enfoque geométrico y su implementación computacional.

Referencias

- [DGMM⁺09] Erik D Demaine, Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz Taslakian, Godfried T Toussaint, Terry Winograd, and David R Wood. The distance geometry of music. *Computational geometry*, 42(5):429–454, 2009.
- [GMTT09] Francisco Gómez-Martín, Perouz Taslakian, and Godfried Toussaint. Interlocking and euclidean rhythms. *Journal of Mathematics and Music*, 3(1):15–30, 2009.

Licencia Este documento está disponible bajo la licencia Creative Commons [CC BY-NC-ND 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/), que permite su distribución con fines no comerciales, siempre que se otorgue el crédito adecuado y no se realicen obras derivadas.